TD 10 : Algorithmes gloutons (suite) et Programmation dynamique

Jeudi 30 novembre 2017

1 Prim et Kruskal

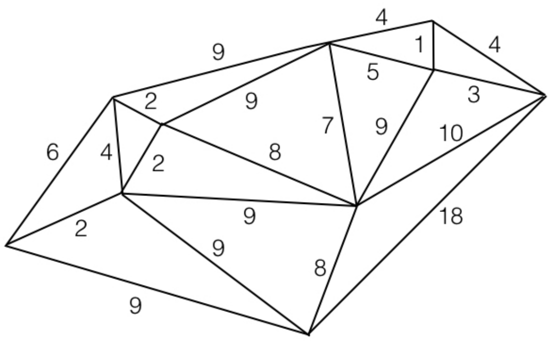

Figure 1 – Graphe exemple G

Question 1 – Dérouler l'algorithme de Prim sur le graphe G.
Question 2 – Dérouler l'algorithme de Kruskal sur le graphe G.
Question 3 – Prouver la correction de l'algorithme de Prim dans le cas général. On prouvera préalablement le lemme suivant :

Lemme 1. *Supposons que X est un ensemble d'arêtes inclus dans un arbre de poids minimal. Soit $(V, S \setminus V)$ une coupe non traversée par X, et (u, v) l'arête de poids minimal traversant cette coupe. Alors il existe un arbre de poids minimal contenant $X \cup \{(u, v)\}$.*

2 Allocation de skis

On s'intéresse au problème d'allouer m paires de skis de longueurs $s_1, \ldots, s_m$, respectivement, à n skieurs $(m \geq n)$ de tailles $h_1, \ldots, h_n$. On appelle *allocation* une fonction (injective) $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$; une allocation f est dite optimale lorsqu'elle minimise $w(f) = \sum_{k=1}^{n} |s_{f(k)} - h_k|$.
Question 4 – Donner la complexité de la solution naïve qui consiste à explorer toutes les possibilités.

QUESTION 5 – Proposer une formule de récurrence pour une allocation optimale des skis. Indice : on pourra supposer que les longueurs des skis et les tailles des skieurs sont rangées dans l'ordre croissant.

QUESTION 6 – En déduire un algorithme efficace permettant de calculer la valeur optimale $w(f)$ et calculer sa complexité.

QUESTION 7 – Expliquer comment modifier l'algorithme pour qu'il renvoie également l'allocation optimale.

3 Triangulation de polygones

On considère dans cet exercice les polygones *convexes* du plan. Une triangulation d'un polygone est un ensemble de cordes (c'est-à-dire de segments reliant deux sommets du polygone) qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone et qui le divisent en triangles.

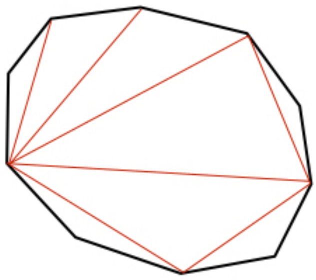

FIGURE 2 – Un exemple de triangulation

QUESTION 8 – Montrer qu'une triangulation d'un polygone à n côtés possède $(n-3)$ cordes et $(n-2)$ triangles.

Le problème considéré est celui de la triangulation optimale de polygones. On part d'un polygone convexe $P = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ où les sommets sont donnés dans l'ordre direct. Les triangulations sont alors définies sur les triangles formés par les côtés et les cordes de P. Le poids d'un triangle est défini comme son périmètre : $w(i, j, k) = \| v_i v_j \| + \| v_j v_k \| + \| v_k v_i \|$. On cherche ainsi une triangulation qui minimise la somme des poids de ses triangles.

On peut remarquer qu'un polygone composé d'un sous-ensemble de sommets d'un polygone convexe est toujours lui-même convexe. On note donc, pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $t[i, j]$ le poids d'une triangulation optimale du polygone $\langle v_{i-1}, \ldots, v_j \rangle$, avec pour convention $t[i, i] = 0$.

QUESTION 9 – Définir t récursivement. En déduire un algorithme. Quelle est sa complexité ?

QUESTION 10 – Que constatez-vous si la fonction de poids est prise égale à l'aire du triangle ?